HAMBURGER INSTITUT FÜR BERUFLICHE BILDUNG

MATHEMATIK

Aufgabenerstellung und Bewertung von Klausuren und Prüfungen für den Erwerb der fachgebundenen bzw. allgemeinen

Hochschulreife

in der Berufsoberschule (Jahrgangsstufe 13)

Hamburg

Januar 2014

Herausgeber: Hamburger Institut für Berufliche Bildung,
Postfach 76 10 48, 22060 Hamburg

Diese Handreichung wird nur in digitaler Form veröffentlicht: www.hibb.hamburg.de

HAMBURGER INSTITUT FÜR BERUFLICHE BILDUNG

Mathematik

Handreichung
für die schulübergreifenden schriftlichen Prüfungsaufgaben zum Erwerb der

Hochschulreife

Redaktion:

Marcel Biskup

Jana Fenske

Klaus Lübbe

Nadine Stüven

Koordination:

Andres Urbszat (HI 21-11)

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Sehr geehrte Damen und Herren, liebe Kolleginnen und Kollegen,

ab dem Prüfungsdurchgang im Sommerhalbjahr 2014 erhalten die Schülerinnen und Schüler der Berufsoberschule (BOS) in der Jahrgansstufe 13 zentral erstellte Prüfungsaufgaben für die schriftliche Abschlussprüfung zur Hochschulreife in den drei Klausurfächern Englisch, Mathematik und Sprache und Kommunikation (Deutsch).

Die zentrale Aufgabenerstellung in der schriftlichen Prüfung ist Bestandteil der Standard- und Qualitätssicherung schulischer Arbeit. Verbindlichkeit und Vergleichbarkeit der Unterrichts- und Prüfungsleistungen sind Qualitätsmerkmale für die fachgebundene bzw. allgemeine Hochschulreife, die im Zuge der BOS in Hamburg erworben werden kann:

- Einheitliche Standards für Unterricht und Abschlüsse der Schulen werden gesichert.
- Die in den einzelnen Schulen erbrachten Lernleistungen werden durch Evaluation der schulischen Arbeit vergleichbar.
- Die Qualität des Unterrichts wird angehoben, die Fächer werden didaktisch weiterentwickelt.
- Die Qualität der Abschlussqualifikation wird gesichert.
- Die Lehrkräfte werden im Bereich der Erstellung der Prüfungsaufgaben entlastet.

Mit diesem Heft erhalten Sie die **verbindlichen Grundlagen für die zentralen Aufgabenstellungen im Fach Mathematik**.

In dieser Handreichung finden Sie konkrete Hinweise auf die Struktur der Prüfung in Mathematik, die Anforderungen, die gestellt werden, die Bewertungsinstrumente und Aufgabenbeispiele zur Orientierung.

Ich hoffe, Sie finden diese Handreichung hilfreich für Ihre Arbeit. Bitte machen Sie diese Informationen auch Ihren Schülerinnen und Schülern zugänglich, damit auch diese einen Eindruck von den Prüfungsanforderungen bekommen.

Mit freundlichen Grüßen

Andreas Grell, HI 22

Referatsleitung kaufmännisch-verwaltende Berufe

1 Allgemeine Regelungen

1.1 Verfahren

Im Frühjahr 2014 wird die erste Abschlussprüfung mit zentraler Aufgabenstellung zum Erwerb der Hochschulreife in dem Bildungsgang BOS Jahrgang 13 durchgeführt. Die Schulen erhalten diese Handreichung, die allgemeine Regelungen für die Hochschulreife und entsprechende Beispielaufgaben enthält, damit die Lehrerinnen und Lehrer sowie die Schülerinnen und Schüler einen guten Eindruck von den Prüfungsanforderungen bekommen.

Die fachrichtungsübergreifenden Prüfungsaufgaben werden von bewährten und zur Geheimhaltung verpflichteten Prüfern und Prüferinnen aus den Schulen entworfen. Die fachrichtungsbezogenen Aufgaben werden schulintern oder schulübergreifend entwickelt. Die gesamte Prüfung wird anschließend durch die Schulaufsicht geprüft und genehmigt.

1.2 Organisation

Die Schulen erhalten drei Tage vor der Prüfung über www2.wibes.de Zugang zu den Prüfungsunterlagen, die aus den Aufgabensätzen und Bewertungshinweisen bestehen. So können diese in der erforderlichen Anzahl an den Schulen vervielfältigt werden. Die Aufgabensätze enthalten (auch als Informationen für die Prüflinge) Angaben über erreichbare Punktzahlen und erlaubte Hilfsmittel.

Der Prüfling

- erhält den Aufgabensatz mit den jeweiligen ausbildungsrichtungsübergreifenden und ausbildungsrichtungsbezogenen Aufgaben und

- ist verpflichtet, die Vollständigkeit des Aufgabensatzes vor Bearbeitungsbeginn zu überprüfen (Anzahl der Blätter, Anlagen, etc.).

1.3 Prüfungszeiten

Die zentrale Prüfung im Fach Mathematik dauert gemäß § 7 der APO-BOS vier Zeitstunden (240 Minuten).

Den Prüflingen wird **ein Aufgabensatz** vorgelegt, <u>es gibt keine Auswahlmöglichkeit</u> und **keine Einlesezeit**.

1.4 Hilfsmittel

Nicht-grafikfähiger Taschenrechner, Formelsammlung sowie ein Rechtschreiblexikon

Der Taschenrechner dient vorrangig als Kontrollinstrument. Rechenwege müssen vollständig dokumentiert werden.

1.5 Inhalt

Die schriftliche Prüfung im Prüfungsfach Mathematik setzt sich zusammen aus **einem Aufgabensatz**, bestehend aus ausbildungsrichtungsübergreifenden Aufgaben (50% der Punkte) und ausbildungsrichtungsbezogenen Aufgaben (50% der Punkte).

Ausbildungsrichtungsübergreifende Aufgaben: Diese beziehen sich auf allgemeine Anwendungen in der Wissensbasis Analysis II und in der Wissensbasis Stochastik.

Ausbildungsrichtungsbezogene Aufgaben: Diese werden für die vier Ausbildungsrichtungen Technik, Wirtschaft und Verwaltung, Gesundheit und Soziales sowie Gestaltung erstellt, wobei die Prüfungsaufgabe zum Vertiefungsbereich 1 der Linearen Algebra für Technik **und** Gestaltung und die Prüfungsaufgabe zum Vertiefungsbereich 2 der Linearen Algebra für Wirtschaft und Verwaltung **und** Gesundheit und Soziales gilt.

Technische Aufgaben beziehen sich auf naturwissenschaftliche Anwendungen im Bereich Aussagenlogik, komplexe Zahlen, gewöhnliche Differentialgleichungen und/oder numerische Verfahren sowie auf den Vertiefungsbereich 2 der Linearen Algebra (Umgang mit Vektoren und damit gebildeten Objekten im Anschauungsbereich) aus dem Bildungsplan der BOS.

Aufgaben aus dem Bereich Wirtschaft und Verwaltung beziehen sich auf komplexes Modellieren im wirtschaftlichen Sachkontext sowie auf den Vertiefungsbereich 1 der Linearen Algebra (Modellieren einfacher Verflechtungen und diskreter Wachstumsprozesse).

Aufgaben aus dem Bereich Gesundheit und Soziales beziehen sich auf die Beschreibende Statistik und/oder auf Aussagenlogik und auf den Vertiefungsbereich 1 der Linearen Algebra (Modellieren einfacher Verflechtungen und diskreter Wachstumsprozesse).

Aufgaben aus dem Bereich Gestaltung beziehen sich auf komplexes Modellieren in geometrischen Zusammenhängen und/oder auf Vertiefungen der analytischen Geometrie sowie auf den Vertiefungsbereich 2 der Linearen Algebra (Umgang mit Vektoren und damit gebildeten Objekten im Anschauungsbereich).

2 Kompetenzbereich

2.1 Übersicht über die Kompetenzbereiche im Fach Mathematik

2.1.1 Die Fähigkeit, mathematisch zu denken

Zur Fähigkeit, mathematisch zu denken, gehört,

- Fragen zu stellen, die für die Mathematik charakteristisch sind („Gibt es …?“, „Wenn ja, wie viele?“, „Wie finden wir ...?“),
- zu wissen, welche Art von Antworten die Mathematik für solche Fragen bereithält,
- zwischen unterschiedlichen Arten von Aussagen zu unterscheiden (Definitionen, Sätze, Vermutungen, Hypothesen, Beispiele, Bedingungen) und
- Reichweite und Grenzen mathematischer Konzepte zu verstehen und zu berücksichtigen.

2.1.2 Die Fähigkeit, mathematisch zu argumentieren

Zur Fähigkeit, mathematisch zu argumentieren, gehört:

- zu wissen, was mathematische Beweise sind und wie sie sich von anderen Arten der mathematischen Argumentation unterscheiden,
- verschiedene Arten von mathematischen Argumentationsketten nachzuvollziehen und zu bewerten,
- ein heuristisches Gespür („Was kann [nicht] passieren und warum?“) und die Entwicklung von mathematischen Argumenten.

2.1.3 Die Fähigkeit zur mathematischen Modellierung

Zur Fähigkeit zur mathematischen Modellierung gehört:

- den Bereich oder die Situation, die modelliert werden soll, zu strukturieren,
- „Mathematisierung“ (Übersetzung der „Realität“ in mathematische Strukturen) und „De-Mathematisierung“ (mathematische Modelle im Rahmen der modellierten „Realität“ zu interpretieren),
- mit einem mathematischen Modell zu arbeiten, das Modell zu validieren, das Modell und seine Ergebnisse zu reflektieren, zu analysieren und kritisch zu beurteilen und über das Modell und seine Ergebnisse (inkl. der Grenzen dieser Ergebnisse) zu kommunizieren.

2.1.4 Die Fähigkeit, Probleme zu stellen und zu lösen

Zur Fähigkeit, Probleme zu stellen und zu lösen, gehört:

- verschiedene Arten von mathematischen Problemen zu stellen,
- mathematische Probleme zu formulieren und zu definieren („reine“, „angewandte“, „offene“ und „geschlossene“) und
- verschiedene Lösungswege für diverse Arten von mathematischen Problemen zu finden.

2.1.5 Die Fähigkeit, mathematische Darstellungen zu nutzen

Zur Fähigkeit, mathematische Darstellungen zu nutzen, gehört:

- verschiedene Formen der Darstellung von mathematischen Objekten und Situationen sowie die Wechselbeziehungen zwischen diesen Darstellungsformen zu erkennen, zu interpretieren und zu unterscheiden und
- verschiedene Darstellungsformen je nach Situation und Zweck auszuwählen und zwischen ihnen zu wechseln.

3 Anforderungsbereiche

Die Anforderungen in der Hochschulreifeprüfung unterscheiden sich nach der Art, der Komplexität und dem Grad der Selbstständigkeit der geforderten Leistung; sie verlangen unterschiedliche Arbeitsweisen. Zur Erhöhung der Transparenz und Vergleichbarkeit lassen sich drei Anforderungsbereiche beschreiben, ohne dass in der Praxis der Aufgabenstellung die drei Anforderungsbereiche immer scharf voneinander getrennt werden können. Daher ergeben sich bei der Zuordnung der Teilaufgaben zu Anforderungsbereichen Überschneidungen. Im Laufe der Ausbildung sollen die Schülerinnen und Schüler die Fähigkeit erwerben zu erkennen, auf welcher Ebene gemäß der Aufgabenstellung gearbeitet werden muss. (Die Ebene der Anforderungsbereiche wird jeweils durch Operatoren und die dortige Angabe I, II oder III verdeutlicht.)

Die zentralen Aufgaben der schriftlichen Fachhochschulreifeprüfung ermöglichen Leistungen in allen drei Anforderungsbereichen mit einem Schwerpunkt im Anforderungsbereich II:

Anforderungsbereich I (Reproduktion)

Der Anforderungsbereich I umfasst die Wiedergabe von Sachverhalten und Kenntnissen im gelernten Zusammenhang sowie die Beschreibung und Anwendung geübter Arbeitstechniken und Verfahrensweisen in einem wiederholenden Zusammenhang.

Im Fach Mathematik kann zum Anforderungsbereich I gehören:

- Bereitstellen von Definitionen, Sätzen und einfachen Beweisen,
- Beschreiben eines einfachen Sachverhalts, eines bekannten Verfahrens oder eines standardisierten Lösungsweges,
- Anfertigen von Skizzen auf eine aus dem Unterricht bekannte Weise; Skizzieren der Graphen von Grundfunktionen,
- Ausführen von geübten Algorithmen wie z. B. Ableiten und Integrieren in einfachen Fällen, Lösen von einfachen Gleichungen und Gleichungssystemen nach eingeübten Verfahren,
- Verwenden des Taschenrechners als Werkzeug z. B. zum Zeichnen eines geeigneten Ausschnitts des Graphen, einer Funktion, beim Lösen von Gleichungssystemen, beim Berechnen von Ableitungen und von Integralen und
- Bestimmen der Extremwerte einer Funktion in Fällen, in denen das eingeübte Verfahren unmittelbar zum Ziel führt.

Anforderungsbereich II (Reorganisation und Transfer)

Der Anforderungsbereich II umfasst das selbstständige Auswählen, Anordnen, Verarbeiten und Darstellen bekannter Sachverhalte unter vorgegebenen Gesichtspunkten in einem durch Übung bekannten Zusammenhang und das selbstständige Übertragen und Anwenden des Gelernten auf vergleichbare neue Zusammenhänge und Sachverhalte.

Im Fach Mathematik kann zum Anforderungsbereich II gehören:

- Veranschaulichen und Beschreiben von Zusammenhängen bei bekannten Sachverhalten mit Hilfe von Bildern, Texten und Symbolen,

- Dokumentieren eines Lösungsweges in sachgerechter mathematischer Form,
- Verfassen eines mathematischen Kurzaufsatzes in bekannten Zusammenhängen,
- Ausführen von Beweisen, deren Beweisstruktur aus dem Unterricht bekannt ist,
- Anwenden von zentralen Begriffen in Beispielen, die in ihrer Struktur einfach sind,
- Interpretieren charakteristischer Eigenschaften einer Funktion anhand ihres Graphen,
- Übersetzen eines Schaubildes in einen Funktionsterm oder eines Funktionsterms in eine Skizze,
- Anpassen von Funktionen an vorgegebene Bedingungen, wenn ähnliche Vorgehensweisen aus dem Unterricht bekannt sind,
- Durchführen vollständiger Fallunterscheidungen in überschaubaren Situationen,
- Übersetzen einer Ausgangssituation in ein geeignetes mathematisches Modell (z.B. Koordinatensystem, Funktionsterm, Gleichungssystem), wenn ähnliche Modellierungen aus dem Unterricht bekannt sind,
- verständiges Anwenden der Beziehung zwischen Änderungsrate und Gesamtänderung in bekannten Situationen,
- analytisches Beschreiben von geometrischen Objekten, wobei die bestimmenden Parameter erst aus anderen Bedingungen erschlossen werden müssen,
- Präsentieren von Arbeitsergebnissen in übersichtlicher, gut strukturierter Form.

Anforderungsbereich III (Problemlösendes Denken)

Der Anforderungsbereich III umfasst das zielgerichtete Verarbeiten komplexer Sachverhalte mit dem Ziel, zu selbstständigen Lösungen, Gestaltungen oder Deutungen, Folgerungen, Begründungen und Wertungen zu gelangen. Dabei wählen die Schülerinnen und Schüler aus den gelernten Arbeitstechniken und Verfahren die zur Bewältigung der Aufgabe geeigneten selbstständig aus, wenden sie in einer neuen Problemstellung an und beurteilen das eigene Vorgehen kritisch.

Im Fach Mathematik kann zum Anforderungsbereich III gehören:

- kreatives Übersetzen einer komplexeren Ausgangssituation in ein geeignetes mathematisches Modell, ohne dass dies in vergleichbaren Zusammenhängen geübt wurde,
- planvolles, begründetes Nutzen und Bewerten von Informationen bei komplexeren oder offeneren Problemstellungen,
- Überprüfen und Bewerten der Vorgehensweise sowie Interpretieren und Beurteilen der Ergebnisse z. B. bei einer Modellierung oder beim Umgang mit Informationen,
- Anwenden zentraler Begriffe und Vorgehensweisen in komplexeren Zusammenhängen,
- Verallgemeinern eines Sachverhalts, der nur von Beispielen her bekannt ist und
- Ausführen eines Beweises, zu dem eigenständige Beweisgedanken erforderlich sind.

4 Operatoren (Liste der Arbeitsaufträge)

Mehr noch als bei dezentralen Aufgaben, die immer im Kontext gemeinsamer Erfahrungen der Lehrkräfte und Schüler mit vorherigen Klausuren stehen, müssen zentrale Prüfungsaufgaben für die Schülerinnen und Schüler eindeutig hinsichtlich des Arbeitsauftrages und der erwarteten Leistung formuliert sein. Die in den zentralen schriftlichen Hochschulreife-Aufgaben verwendeten Operatoren (Arbeitsaufträge) werden in der folgenden Tabelle definiert und inhaltlich gefüllt. Entsprechende Formulierungen in den Klausuren der Berufsoberstufe sind ein wichtiger Teil der Vorbereitung der Schülerinnen und Schüler auf die Hochschulreife.

Neben Definitionen und Beispielen enthält die Tabelle auch Zuordnungen zu den Anforderungsbereichen **I**, **II** und **III** (vgl. den Erwartungshorizont der Prüfungsaufgaben), wobei die konkrete Zuordnung auch vom Kontext der Aufgabenstellung abhängen kann und eine scharfe Trennung der Anforderungsbereiche nicht immer möglich ist.

Operatoren	Definitionen	Beispiele
angeben, nennen I	Ohne nähere Erläuterungen und Begründungen Lösungsweg aufzählen.	Nennen Sie zwei weitere Verfahren zur Bestimmung des Gewinnbereiches ...
anwenden I – II	Einen bekannten Sachverhalt oder eine Handlungsanweisung, Formel, Vorschrift auf Elemente ihres jeweiligen Definitionsbereichs anwenden.	Wenden Sie die Leslie-Matrix auf den veränderten Anfangsbestand an.
begründen II–III	Einen angegebenen Sachverhalt auf Gesetzmäßigkeiten bzw. kausale Zusammenhänge zurückführen. Hierbei sind Regeln und mathematische Beziehungen zu nutzen.	Begründen Sie, warum die Stückkostenfunktion keine Nullstellen aufweisen.
berechnen I	Ergebnisse von einem Ansatz ausgehend durch Rechenoperationen gewinnen.	Berechnen Sie die momentane Geschwindigkeit.
beschreiben I–II	Sachverhalt oder Verfahren in Textform unter Verwendung der Fachsprache in vollständigen Sätzen darstellen (hier sind auch Einschränkungen möglich: „Beschreiben Sie in Stichworten“).	Beschreiben Sie den Verlauf einer s-förmigen Kostenfunktion.
bestätigen I–II	Eine Aussage oder einen Sachverhalt durch Anwendung einfacher Mittel (rechnerischer wie argumentativer) sichern.	Bestätigen Sie, dass sich die Population nach fünf Jahren reproduziert.

Operatoren	Definitionen	Beispiele
bestimmen, ermitteln **II–III**	Einen Lösungsweg darstellen und das Ergebnis formulieren (die Wahl der Mittel kann unter Umständen eingeschränkt sein).	Ermitteln Sie die fehlenden Koeffizienten der Produktionsmatrix.
beurteilen **III**	Zu einem Sachverhalt ein selbstständiges Urteil unter Verwendung von Fachwissen und Fachmethoden formulieren.	Beurteilen Sie den Zeitpunkt der Medikamentengabe vor dem Hintergrund des gewünschten Gesundheitszustandes.
beweisen, widerlegen **III**	Beweisführung im mathematischen Sinne unter Verwendung von bekannten mathematischen Sätzen, logischer Schlüsse und Äquivalenzumformungen, ggf. unter Verwendung von Gegenbeispielen.	Beweisen Sie, dass die Aussage des Produktionsleiters nur für eine Ausbringungsmenge von weniger als 200 ME zutrifft.
entscheiden **II**	Bei Alternativen sich eindeutig auf eine Möglichkeit festlegen.	Entscheiden Sie, welcher Werbeagentur Sie aus Kostengründen den Auftrag erteilen.
ergänzen, vervollständigen **I**	Tabellen, Ausdrücke oder Aussagen nach bereits vorliegenden Kriterien, Formeln oder Mustern füllen.	Ergänzen Sie die Tabelle der Funktionswerte. Vervollständigen Sie die Wertetabelle der Spannungskurve.
erstellen **I**	Einen Sachverhalt in übersichtlicher, meist fachlich üblicher oder vorgegebener Form darstellen.	Erstellen Sie zu der vorgegebenen Koeffizientenmatrix einen Übergangsgraphen.
herleiten **II**	Die Entstehung oder Ableitung eines gegebenen oder beschriebenen Sachverhalts oder einer Gleichung aus anderen oder aus allgemeineren Sachverhalten darstellen.	Leiten Sie die Gewinnfunktion aus den Ihnen vorgegebenen Bedingungen her.
(re-) Interpretieren **II–III**	Die Ergebnisse einer mathematischen Überlegung rückübersetzen auf das ursprüngliche Problem.	Interpretieren Sie: Was bedeutet Ihre Lösung für die ursprüngliche Frage?
skizzieren **I–II**	Die wesentlichen Eigenschaften eines Objektes grafisch darstellen.	Skizzieren Sie den Graphen der Spannungsfunktion in Abhängigkeit der Zeit.

Operatoren	Definitionen	Beispiele
untersuchen **II**	Sachverhalte nach bestimmten, fachlich üblichen bzw. sinnvollen Kriterien darstellen.	Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Grenzkostenfunktion.
vergleichen **II–III**	Nach vorgegebenen oder selbst gewählten Gesichtspunkten Gemeinsamkeiten, Ähnlichkeiten und Unterschiede ermitteln und darstellen.	Vergleichen Sie die Erlösfunktionen eines polypolistischen und eines monopolistischen Anbieters.
zeichnen, **grafisch darstellen** **I–II**	Eine hinreichend exakte grafische Darstellung anfertigen.	Zeichnen Sie den Graphen der Kondensatorentladung in Abhängigkeit der Zeit. Stellen Sie die Punkte und Geraden im Koordinatensystem mit den gegebenen Achsen dar.
zeigen, **nachweisen** **II–III**	Eine Aussage, einen Sachverhalt nach gültigen Schlussregeln, Berechnungen, Herleitungen oder logischen Begründungen bestätigen.	Weisen Sie nach, dass der Füllstand niemals einen Wert von 2,51 m überschreitet.
zuordnen **I–II**	Ohne tiefer gehende Erläuterung eine Verbindung zwischen zwei Listen herstellen.	Ordnen Sie die vorgegebenen Funktionsgraphen die Begriffe „Erlös-“, „Kosten-“ und „Gewinnfunktion“ zu.

5 Notenschlüssel

Die Leistungen in der Jahrgangsstufe 13 und die Leistungen in der Abschlussprüfung der Berufsoberschule werden in Punkten bewertet (APO-BOS § 5). Diese entsprechen folgenden Noten:

15, 14 und 13 Punkte	=	sehr gut (1),
12, 11 und 10 Punkte	=	gut (2),
9, 8 und 7 Punkte	=	befriedigend (3),
6, 5 und 4 Punkte	=	ausreichend (4),
3 und 2 Punkte sowie 1 Punkt	=	mangelhaft (5),
0 Punkte	=	ungenügend (6).

Für die Bewertung der Gesamtleistung der schriftlichen Abiturprüfung gilt die folgende Zuordnungstabelle:

Erreichbare Bewertungseinheiten in %			**Note**	**Punkte**
97	bis	100	1+	15
93	bis unter	97	1	14
90	bis unter	93	1-	13
85	bis unter	90	2+	12
80	bis unter	85	2	11
75	bis unter	80	2-	10
70	bis unter	75	3+	9
65	bis unter	70	3	8
60	bis unter	65	3-	7
55	bis unter	60	4+	6
50	bis unter	55	4	5
45	bis unter	50	4-	4
40	bis unter	45	5+	3
35	bis unter	40	5	2
30	bis unter	35	5-	1
0	bis unter	30	6	0

6 Beispielaufgaben

Hinweis: Denken Sie an die entsprechenden Antwortsätze, Einheiten und an die Dokumentation Ihrer Lösungswege.

6.1 Ausbildungsrichtungsübergreifende Aufgaben

Aufgabe 1: Analysis 25 Punkte

„Koffeinkick durch grünen Tee“

Grüner Tee gilt in vielen Ländern als energiespendendes Getränk. Durch das enthaltene Koffein, früher auch als Teein bezeichnet, wirkt er anregend und kann somit die Aufmerksamkeit erhöhen und das Leistungsvermögen steigern. Die Wirkung auf den menschlichen Organismus lässt nach einer bestimmten Zeit wieder nach.

Eine Testperson nimmt eine Menge 50 μ g Koffein zu sich. Die folgende Funktionsgleichung beschreibt die Wirkstoffkonzentration im Körper der Testperson in Abhängigkeit der Zeit *t*.

$$f(t) = (0{,}19t^2 + 0{,}3t)e^{-0{,}05t} \text{ für } t \geq 0$$

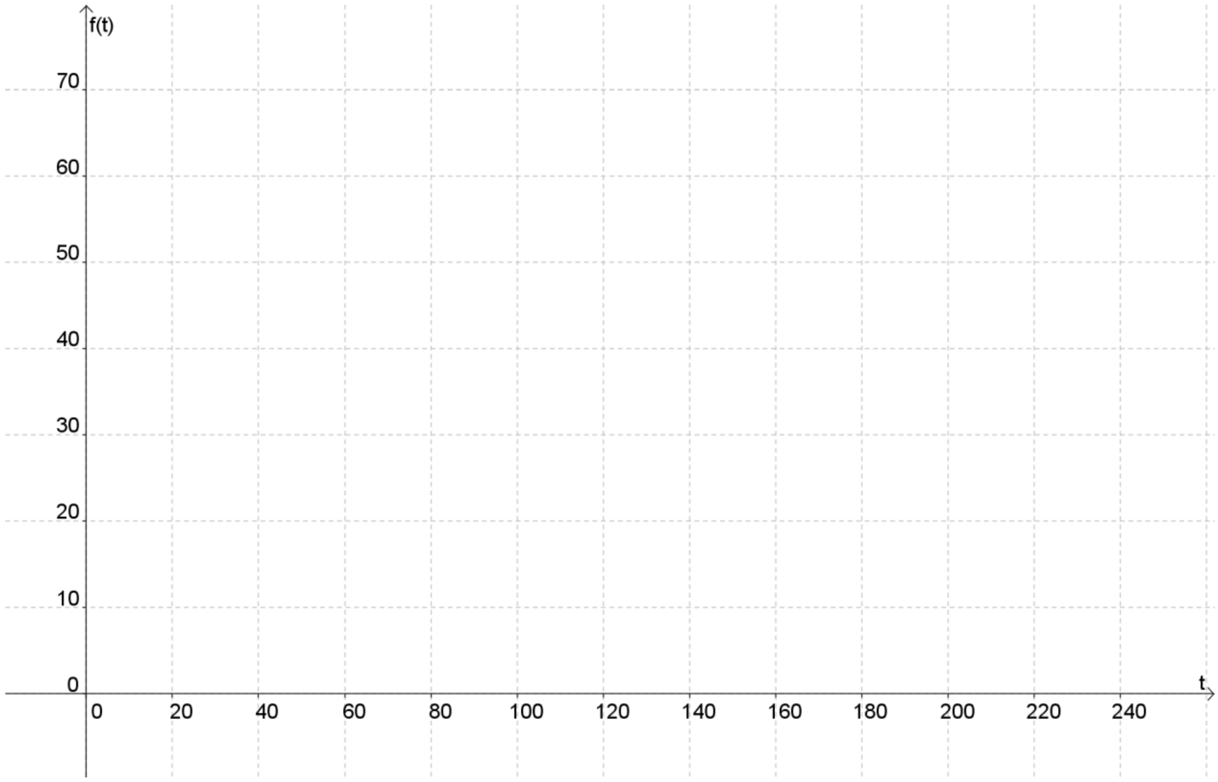
Die Zeit wird in Minuten angegeben.
Es wird davon ausgegangen, dass der grüne Tee sofort ausgetrunken wurde und somit zum Zeitpunkt $t = 0$ die Gesamtmenge der Teebestandteile und somit auch des Koffeins im Magen vorhanden war.

a) Teespezialisten werben damit, dass die anregende Wirkung des Koffeins im grünen Tee sofort in voller Stärke eintritt, d.h. das Maximum der Wirkstoffkonzentration tritt zum Zeitpunkt $t = 0$ auf. Beurteilen Sie diese Aussage der Teespezialisten, indem Sie den Zeitpunkt der höchsten Wirtstoffkonzentration und den zugehörigen Wirkstoffgehalt bestimmen.

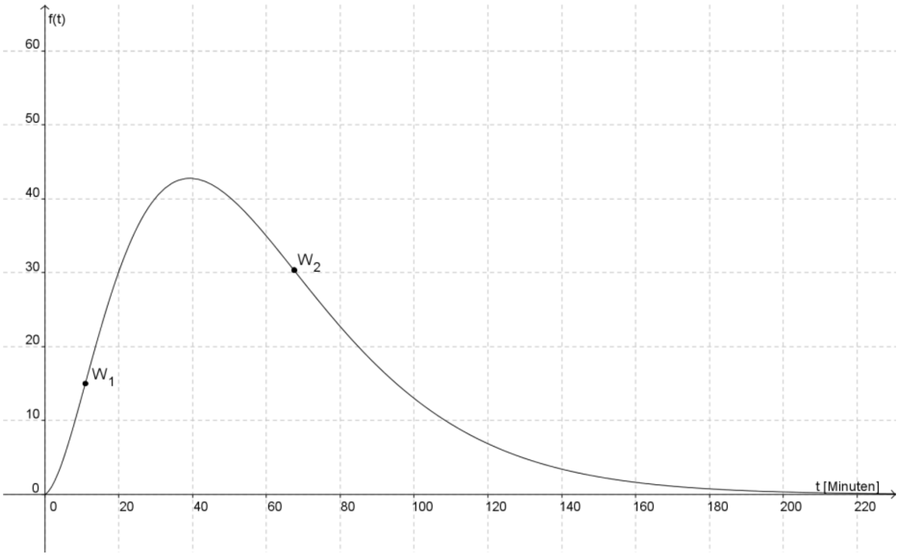
b) Berechnen Sie die Zeitpunkte, in denen der Koffeinaufbau und -abbau im Körper am stärksten ist.

c) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion in das vorgegebene Koordinatensystem und markieren Sie die in a) und b) betrachteten Punkte ein.

d) Der Inhalt der Fläche unter dem Graphen der Funktion *f* ist ein Maß für die Gesamtwirkung in einem bestimmten Zeitraum. Zeigen Sie, dass *F* mit $F(t) = (-3{,}8t^2 - 158t - 3160)e^{-0{,}05t}$ eine Stammfunktion von *f* ist. Bestimmen Sie den Gesamtwirkstoffumsatz in den ersten zwei Stunden.



	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	$f'(t) = (-0{,}0095t^2 + 0{,}365t + 0{,}3)e^{-0{,}05t}$ $f''(t) = (0{,}000475t^2 - 0{,}03725t + 0{,}35)e^{-0{,}05t}$ Ermittlung der Extrema: $f'(t_E) = 0;\ f'(t) = -0{,}0095t^2 + 0{,}365t + 0{,}3 = 0$ $t_{E1} = 39{,}226$ [min] $\quad t_{E2} = -0{,}805 \notin D$ $f''(t_{E1}) < 0; \quad f''(39{,}226) < 0$ Max (39,226/42,782) Zum Zeitpunkt t_{E1} liegt ein Maximum vor. Die Werbebotschaft ist somit nicht richtig, falsche Behaup-tung/Aussage.	5		
b)	$f''(t_w) = 0$ $f''(t) = 0{,}000475t^2 - 0{,}03725t + 0{,}35 = 0$ $\Rightarrow t_{w1} = 10{,}915;\ t_{w2} = 67{,}506$ An den Wendestellen ist die Auf- und Abbaugeschwindigkeit des Koffeingehalts am größten bzw. kleinsten.		5	

c)	Graph der Funktion: 			5
d)	F ist eine Stammfunktion von f, wenn gilt: $F'(t) = f(t)$ Anwendung der Produktregel: $(-3,8t^2 - 158t - 3160)(-0,05e^{-0,05t}) + (-7,6t - 158)e^{-0,05t}$ $= (0,19t^2 + 0,3t)e^{-0,05t} = f(t)$ Bestimmung des Gesamtwirkstoffumsatzes als Flächeninhalt: $A = \int_0^{120} f(t)dt = [(-3,8t^2 - 158t - 3160)e^{-0,05t}]_0^{120} = 2969,53FE$			5

Aufgabe 2: Stochastik 25 Punkte

Eine groß angelegte Verkehrskontrolle der Polizei hat an einem Nachmittag 500 PKW auf eventuell vorhandene Mängel untersucht und dabei kontrolliert, ob drei der wichtigsten Sicherheitsanforderungen im Straßenverkehr erfüllt waren:

B = „Bremsen waren in Ordnung“

R = „Profiltiefe der Reifen war ausreichend“

L = „Lichtanlage funktionierte einwandfrei“

In der Abschlussbesprechung stellte sich heraus, dass 95% der PKW mit einwandfreien Bremsen fuhren, bei 80 PKW die Reifen zu wenig Profiltiefe hatten und 70% der PKW eine funktionierende Lichtanlage besaßen. Die Kontrolle eines PKW kann im Sachzusammenhang als Zufallsexperiment verstanden werden, wobei davon ausgegangen werden darf, dass alle drei Mängel unabhängig voneinander auftreten.

a) Ermitteln Sie mit Hilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse.

Betrachten Sie nun die folgenden Ereignisse:

E_1 = „Ein kontrollierter PKW hatte mindestens 2 Mängel.“

E_2 = „Ein kontrollierter PKW besaß defekte Bremsen und keine ausreichende Reifenprofildichte.“

b) Stellen Sie die beiden Ereignisse E1 und E2 in aufzählender Mengenschreibweise dar und bestimmen Sie rechnerisch ihre Wahrscheinlichkeiten.

c) Zeigen Sie, dass E1 und E2 stochastisch unabhängig sind.

Weiterhin zeigt die Erfahrung bei solchen Kontrollen, dass bei 81,45% der mit vier Personen besetzten PKW alle Insassen angeschnallt sind. Gehen Sie davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit für das Anlegen eines Gurtes auf jedem der vier Sitzplätze gleich ist. Nun wird ein Fahrzeug mit 4 Insassen kontrolliert.

d) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Insasse angeschnallt ist, ungefähr 0,95 beträgt.

e) Bestimmen Sie rechnerisch die Wahrscheinlichkeiten der folgenden beiden Ereignisse. Runden Sie hierbei auf 4 Stellen nach dem Komma. Verwenden Sie hierbei ebenfalls $p = 0,95$

E3 = „Die beiden Personen auf den Vordersitzen sind angeschnallt, die anderen beiden nicht.“

E4 = „Genau zwei der Personen im Fahrzeug sind angeschnallt.“

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>
<table>
<tr><th>Elementarereignis</th><th>Rechnung</th><th>Ergebnis</th></tr>
<tr><td>BRL</td><td>$0{,}95\cdot 0{,}84\cdot 0{,}7$</td><td>$0{,}5586$</td></tr>
<tr><td>$BR\overline{L}$</td><td>$0{,}95\cdot 0{,}84\cdot 0{,}3$</td><td>$0{,}2394$</td></tr>
<tr><td>$B\overline{R}L$</td><td>$0{,}95\cdot 0{,}16\cdot 0{,}7$</td><td>$0{,}1064$</td></tr>
<tr><td>$B\overline{R}\overline{L}$</td><td>$0{,}95\cdot 0{,}16\cdot 0{,}3$</td><td>$0{,}0456$</td></tr>
<tr><td>$\overline{B}RL$</td><td>$0{,}05\cdot 0{,}84\cdot 0{,}7$</td><td>$0{,}0294$</td></tr>
<tr><td>$\overline{B}R\overline{L}$</td><td>$0{,}05\cdot 0{,}84\cdot 0{,}3$</td><td>$0{,}0126$</td></tr>
<tr><td>$\overline{B}\overline{R}L$</td><td>$0{,}05\cdot 0{,}16\cdot 0{,}7$</td><td>$0{,}0056$</td></tr>
<tr><td>$\overline{B}\overline{R}\overline{L}$</td><td>$0{,}05\cdot 0{,}16\cdot 0{,}3$</td><td>$0{,}0024$</td></tr>
</table>
</td><td></td><td>8</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$E_1=\left\{B\overline{R}\overline{L};\overline{B}R\overline{L};\overline{B}\overline{R}L;\overline{B}\overline{R}\overline{L}\right\}$. Für die Wahrscheinlichkeit gilt dann also:
$P(E_1)=0{,}0456+0{,}0126+0{,}0056+0{,}0024=0{,}0662$.
$E_2=\left\{\overline{B}\overline{R}L;\overline{B}\overline{R}\overline{L}\right\}$. Für die Wahrscheinlichkeit gilt dann also:
$P(E_2)=0{,}0056+0{,}0024=0{,}008$</td><td></td><td>2
2
2</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Es gilt: $E_1\cap E_2=E_2$.
Weiterhin gilt: $P(E_1)\cdot P(E_2)=0{,}0662\cdot 0{,}008=0{,}005296\neq 0{,}0662$.
Daher sind die beiden Ereignisse stochastisch unabhängig.</td><td></td><td>4</td><td>1</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>$P(E)=\binom{4}{4}\cdot p^4\cdot q^0 \Leftrightarrow p=0{,}949998177\approx 0{,}95$</td><td></td><td></td><td>2</td></tr>
</table>

e)	$P(E_3) = p \cdot p \cdot q \cdot q = 0{,}95^2 \cdot 0{,}05^2 = 0{,}0023$^ $P(E_4) = \binom{4}{2} \cdot 0{,}95^2 \cdot 0{,}05^2{}' = 0{,}0135$	2	2	
	Gesamt	2	20	3

6.2 Ausbildungsrichtungsbezogene Aufgaben

6.2.1 Technik / Gestaltung

Aufgabe 3: Lineare Algebra/Vektorrechnung — 25 Punkte

Ein Zelt, dass zum Schutz einer Messapparatur im freien Feld aufgebaut wird, besteht aus drei mit Zeltbahn bespannten Stangen, welche sich im Punkt D = (0, 12, 14) treffen.

Die Stangen stehen an den Punkten A = (−2,3,1), B= (−2,15,−3) und C = (4,12,4) auf dem ebenen, aber abschüssigen Boden. Am Verbindungspunkt der Stangen kommt es erfahrungsgemäß zu Leckagen, wobei Wasser vertikal nach unten d. h. in Richtung

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

tropft.

Da vor dem Aufbau der Apparatur sichergestellt werden muss, dass diese auf keinen Fall mit den Leckagen bedingten Wassertropfen in Berührung kommt, muss im Zelt der Auftrittspunkt der Wassertropfen bestimmt werden.

a) Der Boden des Zeltes wird als mathematische Ebene betrachtet. Bestimmen Sie zunächst die Gleichung der durch die Punkte A, B und C bestimmten Ebene E_z in der Form

$$E_Z = \{r | r = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} mit\ \alpha, \beta \in R\}.$$

b) Ermitteln Sie rechnerisch, an welchem Punkt die Wassertropfen auf dem Boden auf treffen.

c) Aus Stabilitätsgründen darf der Winkel <(ADC), welcher von den auf den Punkten A und C aufgestellten Stangen eingeschlossenen wird, nicht größer als 45° sein. Prüfen Sie rechnerisch diese Vorgabe.

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Ebenengleichung
$$E=\{r|r=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}0\\12\\-4\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}6\\9\\3\end{pmatrix} mit\ \alpha,\beta\in R\}$$</td><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Bedingungsgleichungen für Schnittstelle
$$\begin{array}{lllll}-2 & & +6\beta & = 0\\ 3 & +12\alpha & +9\beta & = 12\\ 1 & -4\alpha & +3\beta & = 14-\omega\end{array}$$
Aus der 1.Gleichung: $\beta=\frac{1}{3}$
Einsetzen in die 2.Gleichung: $\alpha=\frac{1}{2}$
Einsetzen in die 3.Gleichung: $\omega=14$

Einsetzen in Ebenengleichung:
$$\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\12\\-4\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6\\9\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\12\\0\end{pmatrix}$$
Einsetzen in Geradengleichung:
$$\begin{pmatrix}0\\12\\14\end{pmatrix}+14\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\12\\0\end{pmatrix}$$
Also treffen die Wassertropfen im Punkt (0 | 12 | 0) auf</td><td></td><td>6

6

1</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Gerade durch A
$$g=\{r|r=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}2\\9\\13\end{pmatrix} mit\ \alpha\in R\}$$
Gerade durch C
$$\square=\{r|r=\begin{pmatrix}4\\12\\4\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}-4\\0\\10\end{pmatrix} mit\ \alpha\in R\}$$
Für den Winkel γ zwischen den Richtungsvektoren gilt
$$cos(\gamma)=\frac{\begin{pmatrix}2\\9\\13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\0\\10\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}2\\9\\13\end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix}-4\\0\\10\end{pmatrix}\right|}=\frac{-8+0+130}{\sqrt{4+81+169}\sqrt{16+0+100}}=\frac{128}{\sqrt{254}\sqrt{116}}=0.711$$
Somit also
$$\gamma=arc\cos(0.711)=44.7°$$</td><td></td><td>3

5</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Gesamt</td><td>4</td><td>21</td><td>0</td></tr>
</table>

6.2.2 Wirtschaft und Verwaltung / Gesundheit und Soziales

Aufgabe 3: Übergangsprozesse **25 Punkte**

Das Bundesamt für Statistik untersucht im Auftrag der Bundesregierung die Verteilung von Vermögenswerten innerhalb der Bundesrepublik. Dazu wird die Bevölkerung in drei „Vermögensschichten“ eingeteilt (U = Unterschicht, M = Mittelschicht und O = Oberschicht). Aus den Vorjahren ist eine gewisse Möglichkeit beobachtet worden, die Schichten zu wechseln. Die Anteile dieser festgestellten Wechsel pro Jahr sind in der folgenden Tabelle dargestellt:

	von U	**von M**	**von O**
nach U	0,88	a	0,01
nach M	b	0,81	0,06
nach O	0,02	0,12	c

a) Weisen Sie nach, dass für die Parameter a = 0,07, b = 0,1 und c = 0,93 gelten muss.

b) Stellen Sie den Wanderungsprozess in Form einer Übergangsmatrix A dar.

c) Stellvertretend für die Bundesrepublik wird die Wanderung in einer Stadt mit 150.000 Einwohnern nachvollzogen. Die Startverteilung der Einwohner auf die einzelnen Schichten verteilt sich im Verhältnis 4:5:6. Bestimmen Sie rechnerisch die Verteilung der Einwohner nach einem Jahr und nach vier Jahren.

d) Überprüfen Sie rechnerisch, ob es eine Einwohnerverteilung auf die drei Schichten gibt, die als stabil betrachtet werden kann, d.h. dass die Einwohnerverteilung auch über mehrere Wechsel gleich bleibt.

Für andere Untersuchungen werden noch weitere Übergangsprozesse betrachtet.

e) Beschreiben Sie einen Übergangsprozess, der durch eine obere Dreiecksmatrix als Übergangsmatrix charakterisiert wird.

f) Beschreiben Sie einen Übergangsprozess, der durch eine Diagonalmatrix als Übergangsmatrix charakterisiert wird.

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Da die Spaltensummen immer 1 ergeben müssen, ergeben sich die Werte für die Parameter aus der gegenseitigen Ergänzung zu 1.		2	
b)	Für die Übergangsmatrix gilt: $A=\begin{pmatrix}0{,}88 & 0{,}07 & 0{,}01\\ 0{,}1 & 0{,}81 & 0{,}06\\ 0{,}02 & 0{,}12 & 0{,}93\end{pmatrix}$.		4	
c)	Als Zustandsvektor erhält man $v_0=\begin{pmatrix}40000\\ 50000\\ 60000\end{pmatrix}$ und somit einer Verteilung nach einem Jahr von $v_1=A\cdot v_0=\begin{pmatrix}0{,}88 & 0{,}07 & 0{,}01\\ 0{,}1 & 0{,}81 & 0{,}06\\ 0{,}02 & 0{,}12 & 0{,}93\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}40000\\ 50000\\ 60000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}39300\\ 48100\\ 62600\end{pmatrix}$. Weiterhin gilt: $A^4=\begin{pmatrix}0{,}63 & 0{,}18 & 0{,}05\\ 0{,}25 & 0{,}49 & 0{,}17\\ 0{,}12 & 0{,}33 & 0{,}78\end{pmatrix}$ und somit beträgt die Verteilung nach vier Jahren $v_4=A^4\cdot v_0=\begin{pmatrix}0{,}63 & 0{,}18 & 0{,}05\\ 0{,}25 & 0{,}49 & 0{,}17\\ 0{,}12 & 0{,}33 & 0{,}78\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}40000\\ 50000\\ 60000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}37200\\ 44700\\ 68100\end{pmatrix}$	2	4	3
d)	Für eine stabile Verteilung muss gelten: $A\cdot v_s=v_s$ mit $v=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ Damit ergibt sich das Lineare Gleichungssystem: $\begin{matrix}0{,}88a+ & 0{,}07b+ & 0{,}01c= & a\\ 0{,}1a+ & 0{,}81b+ & 0{,}06c= & b\\ 0{,}02a+ & 0{,}12b+ & 0{,}93c= & c\\ a+ & b+ & c= & 150000\end{matrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30398{,}67\\ 40863{,}78\\ 78737{,}54\end{pmatrix}$		2 4	
e)	Ein solcher Übergangsprozess würde nur die Entwicklung in eine		2	

	Richtung modellieren, z.B. einen Flussprozess, bei dem der Übergang von einem Zustand zu einem anderen nur in eine Richtung oder der Verbleib in dem Zustand möglich ist.			
f)	Da alle Zustände stabil bleiben und kein Übergang stattfindet, kann nur eine Einheitsmatrix benutzt werden, da kein Wechsel stattfindet.			2
	Gesamt	2	18	5

6.2.3 Technik

Aufgabe 4: Gewöhnliche Differenzialgleichung **25 Punkte**

Bei der Konstruktion von Eishockeystadien muss die Widerstandsfähigkeit der das Spielfeld einfassenden senkrechten Wände (Banden) bestimmt werden.
Im Laufe eines Eishockeyspiels wird der Puck häufig gegen die Bande gespielt und elastisch zurückgeschleudert.
Die Elastizität hat aber ihre Grenzen. Verformungen um mehr als 5 cm führen zur dauerhaften Beschädigung der Bande.
Die auf den eindringenden Puck wirkende Kraft ist

F(x) = - m c x

Mit m = Masse des Pucks
c = Elastizitätskonstante
x = Eindringtiefe

Die Elastizitätskonstante c betrage 10^6 Newton / cm.

Es soll festgestellt werden, ob die Banden den maximal zu erwartenden Geschwindigkeiten des Pucks standhalten. Ein Puck erreicht maximal eine Geschwindigkeit von 144 km/h.

a) Beschreiben Sie die Bewegung des Pucks in Abhängigkeit von der Zeit in Form einer Differentialgleichung zweiter Ordnung.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung einer solchen Differentialgleichung.

c) Prüfen Sie, ob die Eindringtiefe von 4 cm überschritten wird.

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	a) $F(x) = -m\,c\,x$ also $m\,x''(t) = -m\,c\,x(t)$ Damit ergibt sich: $m\,x''(t) = -m\,c\,x(t)$ Und nach Kürzen: $x''(t) = -\,c\,x(t)$ Mit den Nebenbedingungen $x(0) = 0$ und $v(0) = x'(0) = 144km/$□ Also $\boldsymbol{x''(t) = -\,c\,x(t)}$ **mit** $\boldsymbol{x(0) = 0}$ **und** $\boldsymbol{x'(0) = 4000cm/sek}$		4	4
	b) Allgemeine Lösung: $x(t) = a \cdot \sin(\omega t) + b \cdot \cos(\omega t)$ Damit: $x'(\mathrm{t}) = a \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) - b \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)$ $x''(\mathrm{t}) = -a \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) - b \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t)$ Also: $x''(t) = -\,\omega^2 \cdot x(t)$ Und damit $\omega^2 = c \Rightarrow \omega = 10^3$		6	4
	c) Spezielle Lösung: $x(0) = 0 \;\Rightarrow\; b = 0$ $x'(0) = 4000 \;\Rightarrow\; a \cdot \omega = 4000 \Rightarrow a = 4cm$ Der Puck dringt also maximal 4cm tief in die Bande ein.		4	3
	Gesamt	0	14	11

6.2.4 Wirtschaft und Verwaltung

Aufgabe 4: Komplexes Modellieren im wirtschaftlichen Sachkontext 25 Punkte

Die Gewinnschwelle der „Jumping High“ GmbH liegt für ein neu entwickeltes und auf den Markt gebrachtes Abseilgerät bei 4 ME pro Periode.

Für die Kosten- und Gewinnanalyse stehen der Geschäftsleitung folgende Daten zur Verfügung:

Bei einer Menge von 6 ME liegt der Cournot´ sche Punkt C. Die Fixkosten betragen 1400 GE und die Sättigungsmenge liegt bei 20 ME. Bei Erreichung der Sättigungsmenge betragen die Verluste 6720 GE. Weiterhin ist bekannt, dass die GmbH bei einem Marktpreis von 455 GE pro ME 7 Abseilgeräte absetzen können.

a) Weisen Sie nach, dass der Gewinn des Unternehmens für den Absatz des Abseilgerätes durch die Gleichung $G(x) = -x^3 - 14,5x^2 + 424x - 1400$ beschrieben werden kann.

b) Bestimmen Sie für die „Jumping High“ GmbH die Erlös- und Kostenfunktion.

Die Marktsituation hat sich nach einiger Zeit für die „Jumping High“ GmbH verschlechtert. Sie ist nicht mehr alleiniger Anbieter auf dem Markt, wodurch sie ihre Preispolitik dem Markt anpassen müssen. Es gelten folgende Funktionsgleichungen:

$$p_N(x) = 0,8x^2 - 40x + 490$$

$$p_A(x) = 0,3x^2 + 5x + 90$$

c) Bestimmen Sie den neuen Verkaufspreis, den die „Jumping High“ GmbH in Kauf nehmen muss und interpretieren Sie ihr Ergebnis.

d) Bestimmen Sie Konsumentenrente und erklären Sie die ökonomische Bedeutung.

Es gibt Kunden, die für ein Abseilgerät bereit sind mehr als den Marktpreis zu bezahlen. Laut primären Marktforschungsergebnissen würden diejenigen das Produkt auch für 264,80 GE kaufen.

e) Bestimmen Sie den Angebotsüberhang.

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	$G(4)=0$ $G(20)=-6720$ $G'(8)=0$ $G(0)=-1400$ Lösung über LGS bzw. erw. Koeffizientenmatrix: $\text{G(x)=-x}^3-14{,}5x^2+424x-1400$	2	3	
b)	$p(7)=455$ $p(20)=0$ $p(x)=-35x+700$ $E(x)=p(x)\cdot x=-35x^2+700x$ $G(x)=E(x)-K(x)\Leftrightarrow K(x)=E(x)-G(x)$ $K(x)=x^3-20{,}5x^2+276x+1400$	2	3	
c)	Gleichgewichtspreis: $p_N(x)=p_A(x)$ $0{,}8x^2-40x+490=0{,}3x^2+5x+90$ $0{,}5x^2-45x+400=0$ $x_1=10$ $x_2=80\rightarrow\text{nicht in D}_{ök.}$ $p_A(10)=170$ - Die Preise weichen deutlich von den bisherigen Preisen ab. - Aufgrund des neuen Verkaufspreises muss sich die Kostenstruktur der Jumping High GmbH stark verändern um dieses Produkt weiterhin anbieten zu können. - Erlösfunktion ändert sich.		3	2
d)	$K_R=\int_0^{x_G}p_N(x)dx-x_G p_G$ $=\left[\frac{4}{15}x^3-20x^2+490x\right]_0^{10}-10\cdot 170$ $=3166{,}67-1700=1466{,}67$ <u>Konsumentenrente:</u> Minderausgabe der Konsumenten, die bereit gewesen wären, über		2	3

	dem Gleichgewichtspreis zu kaufen.			
e)	$p_A(x) = 246{,}8$ $246{,}8 = 0{,}3x^2 + 5x + 90$ $x_1 = 16$ $x_2 = -\frac{98}{3} \rightarrow$ ökonomisch nicht relevant $p_N = 0{,}8x^2 - 40x + 490 = 246{,}8$ $x_1 = 7{,}08$ $x_2 = 42{,}92 \rightarrow$ ökonomisch nicht relevant Angebotsüberhang: $16 - 7{,}08 = 8{,}92$		3	2
		4	14	7

6.2.5 Gesundheit und Soziales

Aufgabe 4: Beschreibende Statistik — 25 Punkte

Eine soziale Einrichtung zur teilweise stationären Betreuung von Patienten mit Essstörungen soll einen Anbau bewilligt bekommen, in dem weitere Therapiemöglichkeiten angeboten wird. Zur Vorbereitung des Genehmigungsverfahrens wird die Auslastungssituation der Einrichtung untersucht:

Jahr	1990	1991	1997	2001	2006
Auslastung in %	8	23,3	49,5	43,5	73,2

Den bei einer Auslastung von x% erzielten jährlichen Gewinn kalkuliert die Finanzverwaltung mit der Gewinnfunktion $G(x) = -0{,}2x^2 + 30x - 480$. Dabei wird $G(x)$ in Einheiten zu 1.000 € gemessen.

a) Untersuchen Sie die obige Datenlage auf einen eventuellen linearen Zusammenhang und erläutern Sie diesen kurz.

b) Bestimmen Sie rechnerisch die Ausgleichsgerade.

c) Bestimmen Sie rechnerisch die zu erwartende Auslastung im Jahr 2007 und ermitteln Sie darüber hinaus rechnerisch den zu erwartenden Gewinn in diesem Jahr.

d) Ermitteln Sie rechnerisch, in welchem Jahr die Klinik zum ersten Mal keinen Verlust erwirtschaftet.

e) Bestimmen Sie rechnerisch, in welchem Jahr der größte Gewinn zu erwarten ist und geben Sie diesen an.

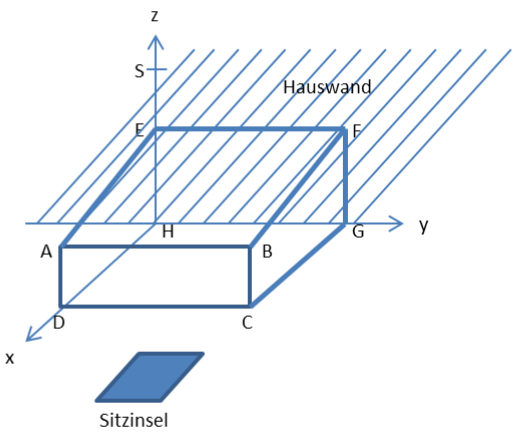
	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	Es ist der Korrelationskoeffizient zu berechnen: $\bar{x} = 1997$, $s_x^2 = 36{,}4$, $s_x = 6{,}033$, $s_{xy} = 127{,}1$, $r_{xy} = 0{,}943$ $\bar{y} = 39{,}5$, $s_y^2 = 501{,}276$, $s_y = 22{,}389$ Da der Korrelationskoeffizient nahe bei +1 liegt, besteht ein positiver linearer Zusammenhang.	2	4	
b)	Berechnung der Gleichung der Ausgleichsgeraden: a. $m = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = 3{,}5$ b. $b = \bar{y} - \frac{s_{xy}}{s_x^2} \cdot \bar{x} = -6950$ Die Ausgleichsgerade hat also die Form $y = 3{,}5x - 6950$.	1	2 2	

c)	Für das Jahr 2007 ergibt sich mit der Ausgleichsgerade eine Auslastung von $y = 3{,}5 \cdot 2007 - 6950 = 74{,}5\%$ und einen Gewinn von $G(74{,}5) = 644{,}95$ Geldeinheiten. Dies sind 644.950 Euro.		3	
d)	Es ist zunächst die kleinste Nullstelle der Gewinnfunktion zu bestimmen, damit man weiß, bei welcher Auslastung erstmals kein Verlust erwirtschaftet wurde. Mit Hilfe der Ausgleichsgeraden kann man dann berechnen, welche Jahreszahl zu dieser Auslastung gehört: $G(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 18{,}21 \wedge x_2 = 131{,}79$ dann folgt weiter: $18{,}21 = 3{,}5x - 6950 \Leftrightarrow x = 1990{,}9$. Also wurde im Jahr 1991 erstmals kein Verlust erzielt.		4	
e)	Zuerst werden die Extrempunkte ermittelt: $G'(x) = -0{,}4x + 30 = 0 \Leftrightarrow x = 75$ $G''(x) = -0{,}4 < 0$ also liegt ein Hochpunkt vor. $G(75) = 645$ Der Hochpunkt liegt also bei $H(75/645)$ Mit der Ausgleichsgerade ergibt sich: $75 = 3{,}5x - 6950 \Leftrightarrow x = 2007{,}14$ Der maximale Gewinn von 645.000 Geldeinheiten wird bei einer Auslastung von 75% im Jahr 2007 erreicht.	1	4	2
	Gesamt	4	19	2

6.2.6 Gestaltung

Aufgabe 4: Komplexes Modellieren in geometrischen Zusammenhängen 25 Punkte

Familie Schrader möchte bei ihrem Haus einen rechteckigen Wintergarten mit Schrägdach anbauen. Die Seitenfläche EFGH soll an der Hausmauer liegen. Die unten dargestellte Skizze (nicht maßstabsgetreu) zeigt, die Planung des beauftragten Bauunternehmers.



Gegeben sind B(5 / 3,5 / 2), D(5 / 0 / 0) und E(0 / 0 / 3). Alle Angaben sind in Metern.

a) Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte A, C, F und G an.

b) Berechnen Sie, wie viel Glas für die drei zu verglasenden Seitenflächen benötigt wird.

c) Frau Schrader möchte den Wintergarten auch nutzen, wenn es draußen friert. Den Heizlüfter, den sie dazu anschaffen möchte, gibt es in verschiedenen Größen. Um sich in Bezug auf die Größe optimal beraten zu lassen, benötigt Frau Schrader das Volumen des Wintergartens.

   Bestimmen Sie für Frau Schrader das Volumen des Wintergartens.

d) In den Bauvorschriften ist festgehalten, dass das Schrägdach mindestens einen Neigungswinkel von 10° aufweisen muss, damit sich kein Wasser auf dem Dach sammelt.

   Prüfen Sie, ob diese Vorschrift bei dem geplanten Wintergarten eingehalten wurde. Stellen Sie dazu zunächst die Gleichung für die Ebene ABEF auf und geben Sie diese in der Parameter- und Koordinatenform an.

e) Familie Schrader möchte an schönen Sommerabenden weiterhin an der Sitzinsel im Garten sitzen. Diese wird bisher von einem Strahler beleuchtet, der sich 6 Meter über dem Boden im Punkt S an der Hauswand befindet. Jetzt hat die Familie Bedenken, dass die Sitzecke nicht mehr direkt beleuchtet werden kann, sondern im Schatten des Wintergartens liegt.

   Untersuchen Sie, ob die Sorgen von Familie Schrader berechtigt sind, wenn die Eckpunkte der Sitzinsel P(9 / 1 / 0), Q(9 / 3 / 0), R(7 / 1 / 0) und T(7 / 3 / 0) lauten.

   Erstellen Sie außerdem eine Skizze, die den Schattenwurf des Wintergartens durch den Strahler zeigt.

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">**Lösungsskizze**</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Gegeben: B(5/3,5/2), D(5/0/0), E(0/0/3)

Daraus ergibt sich: A(5/0/2), C(5/3,5/0), F(0/3,5/3), G(0/3,5/0)</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Trapez (ADHE) = 0,5 * (2 +3) * 5 = 12,5
ebenso Trapez (BCFG) = 12,5
Rechteck (ABCD) = 2 * 3,5 = 7

Die zu verglasende Außenfläche ist 32 m^2 groß.</td><td>0,5
0,5
1

1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Volumen:
V = G * h = 12,5 * 3,5 = 43,75

Der Rauminhalt beträgt 43,75 m^3.</td><td>

1</td><td>
1</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Gesucht E_1 mit den Punkten E, F, G und H

$E_1 = E_{ABEF} : \vec{x} = 0\vec{E} + r \cdot E\vec{A} + s \cdot E\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$

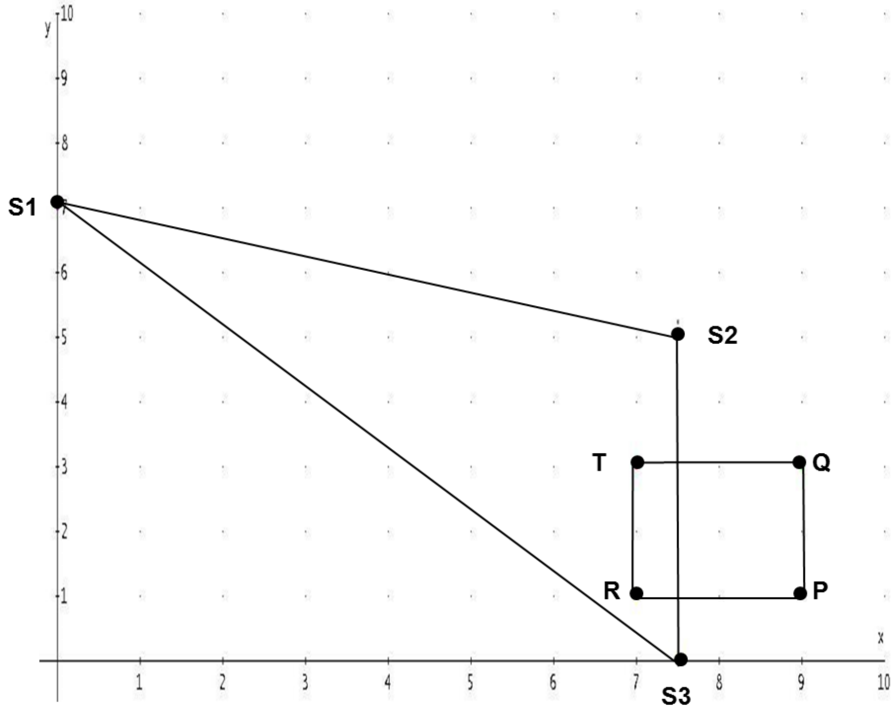
Berechnung des Normalenvektors zur Bildung der Koordinatenglei-chung:
$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 0 \\ 17{,}5 \end{pmatrix} gekürzt : \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 15$ also gilt: $x_1 + x_3 = 15$</td><td></td><td>2

1

2</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Gesucht ist der Winkel α zwischen den Vektoren AE und DH.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	$\cos\alpha = \frac{\vec{AE}\cdot\vec{DH}}{\lvert\vec{AE}\rvert\cdot\lvert\vec{DH}\rvert} = \frac{\begin{pmatrix}-5\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5\\0\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{26}\cdot 5} = \frac{25}{\sqrt{26}\cdot 5} = \frac{5}{\sqrt{26}}$ $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right) \approx 11{,}3$ Der Winkel beträgt 11,3°. Die Bedingung ist also erfüllt.	1	1	2
e) + g)	S(0/0/6) Gesucht sind die Schnittpunkte der drei Geraden g_{SF}, g_{SB} und g_{SA} mit der Ebene, die von der x- und y-Achse aufgespannt wird. Es muss daher gelten, dass $x_3 = 0$ ist. $g_{SF}: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\3{,}5\\-3\end{pmatrix} mit x_3 = 0 ergibt sich: 0 = 6 - 3r \Leftrightarrow r = 2$ $Der Schnittpunkt S_1 liegt somit bei:$ $S_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}0\\3{,}5\\-3\end{pmatrix} = (0/7/0)$ $g_{SB}: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}5\\3{,}5\\-4\end{pmatrix} mit x_3 = 0 ergibt sich: 0 = 6 - 4r \Leftrightarrow r = 1{,}5$ $Der Schnittpunkt S_2 liegt somit bei:$ $S_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} + 1{,}5\cdot\begin{pmatrix}5\\3{,}5\\-4\end{pmatrix} = (7{,}5/5{,}25/0)$ $g_{SA}: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}5\\0\\-4\end{pmatrix} mit x_3 = 0 ergibt sich: 0 = 6 - 4r \Leftrightarrow r = 1{,}5$ $Der Schnittpunkt S_2 liegt somit bei:$ $S_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} + 1{,}5\cdot\begin{pmatrix}5\\0\\-4\end{pmatrix} = (7{,}5/0/0)$		1 2 2 2	

	 Die Abbildung zeigt, dass die Sitzecke nur noch teilweise im direkten Licht des Strahlers liegt.		3	
	Gesamt	6	17	2